Problemas de optimización en el pre cálculo

David Esteban Espinoza*

Resumen

En esta investigación se realiza una aproximación a los problemas de optimización a través de la Socioepistemología, lo que permite tener una visión más amplia sobre las circunstancias socio-histórico-culturales en las que estos se generaron. Así, se pretende sentar una base de referencia en el tratamiento de este tema, de modo que brinde antecedentes para futuras investigaciones y contribuya a ampliar el discurso matemático escolar.

Problema de investigación

Diversas investigaciones resaltan que la enseñanza de la matemática presenta serias dificultades, debido a que muchos modelos de enseñanza se limitan entender a los objetos y procesos matemáticos como objetos acabados, como una matemática estática, aceptando lo que encontramos en los libros como una "verdad absoluta". Este problema se agudiza si se promueve que definiciones y ejemplos estén sujetos a procesos de repetición o memorización.

Cen & Cordero (2006) refieren que "algunos maestros poseen la creencia que el éxito en los estudiantes se circunscribe a tener que realizar secuencias de repetición, a través de una lista considerable de ejercicios; tal vez con la finalidad que el estudiante memorice algún tipo de

* Universidad Peruana de Integración Global

procedimiento matemático". Rosado (2004) manifiesta al respecto que "dicha práctica didáctica elimina la posibilidad de considerar al conocimiento matemático como una herramienta funcional, limitando al estudiante a tratar con distintas clases de situaciones". Mientras que Cantoral (2000) hace notar que "estas posturas no sugieren una enseñanza que favorezca las distintas miradas del concepto, sus relaciones con conceptos o imágenes ya adquiridas de éstos".

El tratamiento de los problemas de optimización usando Programación Lineal en la secundaria crea una visión limitada en los alumnos, además, no se garantiza que puedan reconocer y argumentar que la solución hallada es la mejor para las condiciones dadas del problema. El problema persiste en el nivel superior al resolver estos problemas por medio de las técnicas del cálculo diferencial donde el algoritmo empleado hace que el problema se vea rutinario. En ambos casos, se deja la impresión al alumno y también a los profesores que su tratamiento es exclusivo a través de la Programación Lineal o del Cálculo Diferencial y no se garantiza que han comprendido lo que es optimizar.

Investigaciones recientes en Matemática Educativa dan cuenta de marcos teóricos, que básicamente, recomiendan tratar estos conceptos y ejemplos matemáticos desde un enfoque centrado en las prácticas sociales más que en los conceptos. Una de estas aproximaciones teóricas es la Socioepistemología.

Esta visión nos permite percatamos que los problemas de optimización son muy antiguos; que hay evidencias de ellos desde el siglo IV a.C., cuando los griegos planteaban problemas sobre figuras planas de perímetro constante y de área máxima. "En una versión de Los Elementos de Euclides se encuentra el problema de inscribir en un triángulo dado (ABC) el máximo paralelogramo teniendo un ángulo común (B) con el triángulo, Casey (1885)". Estos problemas se abordaban desde el punto de vista geométrico. (Fig. 03)

PROP. XXVII.- PROBLEM

To inscribe in a given triangle (ABC) the maximum parallelogram having a common angle (B) with the triangle.

Sol.- Bisect the side AC opposite to the angle B, at P: through P draw PE, PF parallel to the other sides of the triangle. BP is the parallelogram required.

Dem.- Take any other point D in AC: draw DG.

En una versión de Los Elementos de Euclides se encuentra el problema de inscribir en un triángulo dado (ABC) el máximo paralelogramo teniendo un ángulo común (B) con el triángulo.

Fig. 03

Heron de Alejandría, Arquímedes, Euclides y otros de la Grecia antigua no planteaban, ni resolvían problemas sobre Máximos y Mínimos utilizando las herramientas del Cálculo o de la Programación Lineal; tampoco Kepler, Descartes y Fermat; sin embargo, todos ellos contribuyeron a la solución de este tipo de problemas. Rios (2004) afirma, respecto a los métodos de solución que propusieron Kepler, Descartes y Fermat que estos son particulares, y se basan en elementos geométricos o algebraicos.

La Matemática Educativa se responsabiliza de dos aspectos insoslayables: el primero sobre cómo está constituido el saber matemático y el segundo sobre cómo ingresa este saber al sistema didáctico, refiere Rosado (2004). En este sentido sería pertinente identificar el discurso matemático escolar relacionado a los problemas de optimización con la finalidad de identificar de qué manera se presentan en los libros de texto y si guarda algún tipo de relación con el tratamiento de estos problemas entre los siglos XX a.C. y II a.C.

Relevancia de la investigación

En nuestra investigación asumiremos que los grupos humanos construyen conocimiento a través de las prácticas sociales en la que se involucran. En particular, analizaremos las prácticas sociales asociadas a los problemas de optimización entre los siglos XX a.C. y VII a.C. Del mismo modo consideramos que nuestro trabajo es relevante por reconocer, en el sentido de Covian (2005), al conocimiento matemático como saber funcional, que se va transformando y transmitiendo por generaciones, puesto que se reconoce su validez.

Asimismo, aproximarnos a los problemas de optimización a través de la Socioepistemología, permitirá tener una visión más amplia sobre las circunstancias socio-histórico-culturales en las que estos se generaron, por consiguiente, sentar una base de referencia en el tratamiento de este tema de modo que brinde antecedentes para futuras investigaciones, buscando de esta manera incidir en el discurso matemático escolar.

Marco teórico

Se reporta un estudio sobre los problemas de optimización tanto en el discurso matemático escolar de la enseñanza secundaria peruana y sobre el tratamiento que se les dio a estos problemas entre los siglos XX a.C. – II a.C. La problemática se centra que en la actualidad el tratamiento de problemas de optimización está relacionado con el uso exclusivo de procedimientos de la Programación Lineal y métodos del Cálculo Diferencial. Como antecedentes se muestran diversos trabajos donde se desarrollan problemas de optimización sin el uso de estas herramientas.

El paradigma de investigación bajo el cual se ha realizado este trabajo de tesis es la Socioepistemología. Se comentan los aportes realizados por Montiel (2005) en la descripción de este marco teórico y en particular, en la delimitación de las prácticas sociales.

Se muestra de qué manera se manifiestan los problemas de optimización en el discurso matemático, analizando los criterios que usan los autores para presentarlos en los libros de texto, también se caracterizan los contextos de los enunciados y los procesos de solución de los problemas.

Se recurre a un estudio socioepistemológico sobre los problemas de optimización entre los siglos XX a.C. – II a.C. Así, se identifica la formalización de la geometría y de los fenómenos ópticos como las prácticas sociales que estuvieron detrás del desarrollo de los problemas de optimización.

La discusión y resultados de lo encontrado evidencian que el conocimiento matemático se va transformando. Se concluye que mientras que los problemas de optimización fueron tratados en sus orígenes en contextos geométricos, en la formulación de los enunciados de los problemas escolares actuales existe ausencia de un contexto geométrico y que en el proceso de solución predominan métodos algebraicos, aritméticos y de algoritmia.

Metodología de investigación

Mediante el acercamiento socioepistemológico, nos aproximamos a los estudios especializados mediante un análisis de ideas, contextos, y circunstancias que, señaladas en la historia y en la epistemología, establecen explicaciones sobre la construcción del conocimiento matemático. En nuestro caso el foco de atención son los problemas de optimización. "Con estos elementos, es posible formar una primera base de significaciones para los conceptos y procesos matemáticos, buscando incidir, en el discurso matemático escolar" Cantoral (2001)

Es así como la socioepistemología puede ser percibida también en el plano metodológico.

- Etapa 1

  Revisaremos tanto el programa como los textos escolares de secundaria, con la finalidad de describir el discurso matemático escolar relacionado con los problemas de optimización en la secundaria.

- Etapa 2

  A través de los estudios especializados y mediante una revisión bibliográfica, análisis de ideas, contextos, y circunstancias analizaremos la evolución de los problemas de optimización entre los siglos XX a.C. y II a.C.

- Etapa 3

  Tomando en cuenta los criterios de Montiel (2005) para delimitar las prácticas de referencia, actividades y prácticas sociales, analizamos las prácticas sociales asociadas a los problemas de optimización entre los siglos XX a.C. y II a.C.

Desarrollo de algunos ejemplos y análisis de resultados

Ejemplo del análisis de un problema de libro de texto en el primer grado de secundaria

ENUNCIADO	Si	No
¿Contexto extra matemático?	x	
¿Contexto geométrico?		x
PROCESO DE SOLUCIÓN	Si	No
¿Incluye procesos de visualización?		x
¿Incluye procesos de variación y cambio?		x
¿Incluye proceso algebraico, aritmético o algorítmico?	x	
¿Contexto extra matemático?	x	

Página : 45 /Problema desarrollado Nº 04

Enrique tiene 3 varillas de madera de 12, 24 y 30 centímetros, respectivamente. ¿Cuántas piezas en total se pueden obtener al cortar las tres varillas de modo tal que las piezas sean iguales entre si y del mayor tamaño posible?

SOLUCIÓN

Enrique después de comprender el enunciado del problema, dice:

- Las piezas de madera deseadas deben ser del mayor tamaño posible, sin que sobre residuo; eso significa que se debe calcular el máximo común divisor de 12; 24; y 30.
- Efectuamos las operaciones:

$$\begin{array}{rrr|l} 12 & 24 & 30 & 2 \\ 6 & 12 & 15 & 3 \\ 2 & 6 & 5 & \end{array}$$

MCD (12; 24; 30)= 2X3=6

- El número 6 corresponde a la medida máxima de cada pieza, esto es, cada pieza debe medir 6 cm.
- Dividimos cada varilla entre 6 cm:

longitud de cada varilla		medida máxima		Piezas
12 cm	÷	6 cm	=	2
24 cm	÷	6 cm	=	4
30 cm	÷	6 cm	=	5
		Total	=	11

Respuesta: En total se puede obtener 11 pieza

Ejemplo del análisis de un problema de libro de texto en el segundor grado de secundaria

ENUNCIADO	Si	No
¿Contexto extra matemático?	x	
¿Contexto geométrico?		x
PROCESO DE SOLUCIÓN	Si	No
¿Incluye procesos de visualización?		x
¿Incluye procesos de variación y cambio?		x
¿Incluye proceso algebraico, aritmético o algorítmico?	x	

Un cartero parte de la oficina postal llevando en una bolsa cierto número de sobres. Al mediodía ha repartido 134 sobres y en una bolsa restan menos de 38 sobres por repartir. ¿Cuál es el mayor número de sobres con el que pudo haber salido de la oficina?

Página : 155 / Problema propuesto Nº 09

Contraste de resultados obtenidos en el análisis de textos y la revisión histórica

- De lo encontrado a lo largo de la revisión histórica y revisión de los libros de texto, coincidimos con Covian (2005), en el planteamiento del conocimiento matemático como saber funcional, que se va transformando y transmitiendo por generaciones puesto que se reconoce su validez.
- En el discurso matemático expresado a través de los textos no existe un tratamiento geométrico,

contrariamente a lo que se observa con la geometría en sus orígenes, además evidenciamos problemas de optimización en diversos capítulos del 2do, 3er y 4to grado de secundaria sin que el tratamiento sobre optimización sea explícito en el texto.

- Los problemas de optimización identificados entre los siglos XX a.C. y VII d.C son sensiblemente distintos a los problemas hallados en los libros de texto de las escuelas secundarias. En estas últimas prevalece un contexto extra matemático, mientras que en los primeros prevalece un contexto geométrico.

- El tratamiento dado a los problemas de optimización en sus orígenes es una alternativa, al trabajo propuesto en los textos. Los problemas de optimización en su contexto de origen obedecieron no sólo a necesidades sociales de origen pragmático o reflexivo de la época, sino también se apoyaba en una epistemología diferente que obedece a un programa emergente, alternativo en el campo de la ciencia y la filosofía, con el que se buscaba formalizar la geometría y los fenómenos ópticos con respaldo matemático. De esta manera, mostramos la relación de dependencia entre el surgimiento o desarrollo del conocimiento, así como los escenarios regulados por prácticas de orden social. En esa misma línea, Montiel (2005) reporta resultados similares en su investigación.

- En los textos se ha identificado un discurso matemático escolar que trata sobre problemas de optimización en la que predomina el trabajo algorítmico, centrado en los conceptos en el que no se le brinda la debida importancia a los procesos de variación, visualización; y, en el que además, no se toma en cuenta los contextos socioculturales, ni geométricos que le dieron origen, lo cual necesitaría reformularse.

Afirmamos que tratar los problemas de optimización desde un enfoque centrado en las prácticas sociales más que en los conceptos, aportaría avances en el discurso matemático por poseer elementos que nutrirían al sistema didáctico.

Referencias

Alarcón, S., Suescún, C. & De la Torre, A. (2005). El método de las tangentes de Fermat. Revista Matemáticas: Enseñanza Universitaria, 13(2), 102–123.

Arrieta, J. (2003). Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula. Tesis de Doctorado no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados. Instituto Politécnico Nacional.

Buendía, G. (2004). Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en marco de prácticas sociales. Tesis de Doctorado. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados. Instituto Politécnico Nacional.

Boyer, C. (1987). Historia de la matemática. Madrid: Alianza Editorial S.A.

Cantoral, R. & Farfán, R. (2000). Pensamiento y lenguaje variacional. En Cantoral, R. (Coord.), Introducción al análisis. El futuro del cálculo infinitesimal. México: Grupo Editorial Iberoamérica, 69–91.

Cantoral, R. (2000). Pasado, presente y futuro de un paradigma de investigación en Matemática Educativa. En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. México: Grupo Editorial Iberoamérica, volumen (13), 54-62.

Cantoral, R. (2001).Matemática Educativa. Un estudio de la formación social de analiticidad. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Cantoral, R. & Farfán, R. (2003). Mathematics educations a vision of its evolution. Educational Studies in Mathematics. 53(3), 255-270.

Cantoral, R & Farfán, R. (2003). Desarrollo conceptual del cálculo. México: Thomson.

Cantoral, R. et. al. (2003). Desarrollo del pensamiento matemático. México: Editorial Trillas.

Cantoral, R. et. al. (2006). Socioepistemología y representación algunos ejemplos. Relime, Número especial, 83-102.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2004). La sensibilité á la contradiction: logarithmes de nombres négatifs et origine de la variable complexe. Recherches en Didáctique des Mathématiques, 24 (2.3), 137-168.

Castañeda (2004). Un acercamiento a la construcción social del conocimiento: Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión. Tesis de Doctorado. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados.